Tutorato Analisi 1 (Covid) 20/4/20

Equazioni differenziali

Notaz: funzione incognita: u

variabile (di u): t.

$$\underset{u'(t)}{u'} - 4\underset{u(t)}{u} = 17\,\text{sen}(4t)$$

Equazioni del primo ordine "derivata più alta di u che compare"

$$\left\{\begin{array}{l} u' = f(t,u) \\ u(t_0) = u_0 \end{array}\right. \leftarrow \text{Pbm. di Cauchy}$$

Es.

$$\left\{\begin{array}{l} u'' - 4u = 0 \\ u(0) = 5 \\ u'(5) = 6 \end{array}\right. \leftarrow \text{NON è un pbm di Cauchy}$$

(ESISTENZA)

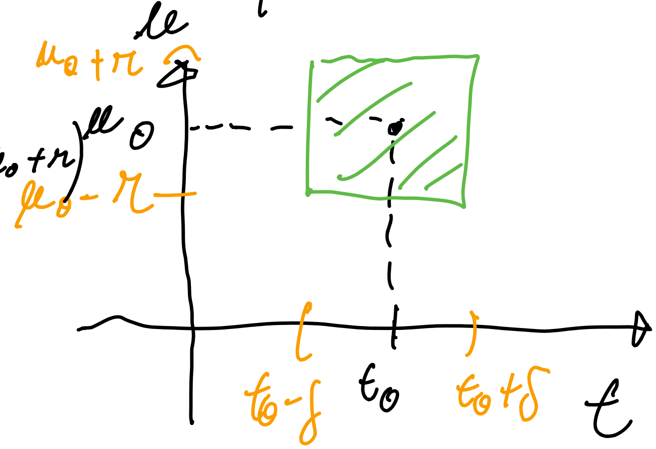
Teorema 1 Consideriamo il seguente pbm di Cauchy di ordine 1 (in realtà ok anche

$$\begin{cases} u' = f(t,u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

in ordine ≥ 1)

Supponiamo f sia definita in

$(t_0-\delta, t_0+\delta) \times (u_0-r, u_0+r)$



e che qui sia CONTINUA.

Allora il pbm. ammette ALMENO una soluzione.

(ES. e UNICITÀ)

Teorema 2 Nelle ipotesi di sopra, se in più f è LOCALMENTE LIPSCHITZIANA in u UNIFORMEMENTE rispetto a t, ALLORA $\Rightarrow$ Il pbm di Cauchy ha un'unica soluzione.

TRADUZIONE:

$\forall t \in (t_0-\delta, t_0+\delta) \quad \forall u_1, u_2 \in (u_0-r, u_0+r)$

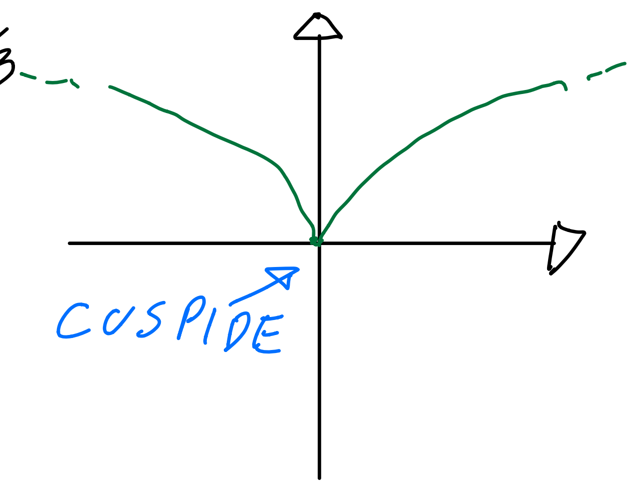
$$|f(t,u_1) - f(t,u_2)| \le L \cdot |u_1 - u_2|$$

cost.^{e} di Lip.

— o — o —

"Il pennello di Peano"

$$\begin{cases} u' = 3\cdot|u|^{2/3} \\ u(0)=0 \end{cases}$$



In questo caso,

$f(t,u) = |u|^{2/3}$ è continua, in u unif. int

ma NON è loc. lips. $\forall$ in un intorno di $(0,0)$.

Ci aspettiamo quindi esistenza ma non unicità (FORSE).

Soluzioni: $u(t)\equiv 0$ è soluzione.

$$u(t) = t^3 \quad \left(u'(t) = 3t^2 = 3\,|u(t)|^{2/3}\right)$$

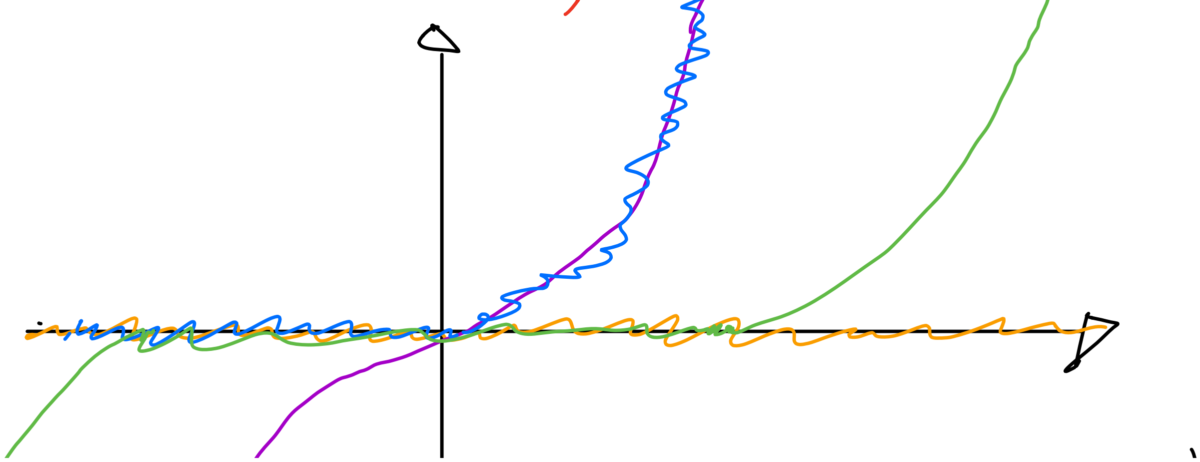
Posso incollarle...

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ t^3 & t > 0 \end{cases}$$

Possiamo traslare quest'ultima soluzione ed ottenere infinite soluzioni del pbm di Cauchy.

Es:

$$u(t) = \begin{cases} (t+2)^3 \;\; [(t+a)] & t \leq -2 \;\; [(-a)] \\ 0 & -2 \;[(-a)] < t \leq 2 \;\; [(b)] \\ (t-2)^3 \;\; [(-b)] & t \geq 2 \;\; [(b)] \end{cases}$$



Il pbm. di Cauchy ha ∞ soluzioni (che dip. da 2 param).

<u>Oss.</u> Come accade, mi potevo aspettare ci fossero soluzioni non C^2 (o 3?) ma non è detto che nessuna soluzione sia di classe C^2 (o più)

— o — o —

<u>Eq. diff. lineari di grado ≥ 1</u>

Considériamo il seguente pbm. di Cauchy

$$\begin{cases} u''' - 4u'' + 4u' = e^{2t} \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

$\neq 0$

(Eq. non)

omogenea

$$\begin{cases} u'(0)=0 \\ u''(0)=1 \end{cases}$$

STRATEGIA: 1) Trovare base dello
ker dell'operatore = sp. di soluzioni della omogenea.

$u \to u''' - 4u'' + 4u'$

PAR.

Brevemente: $\underline{1.1}$ verifica che

$$u \xrightarrow{T} \sum_{i=0}^{k-1} a_i(t)\, u^{(i)}(t)$$

è lineare, cioè

$$T(\lambda u_1 + \mu u_2) = \lambda T(u_1) + \mu T(u_2)$$

$\underline{1.2}$ $\Rightarrow \ker(T)$ è SS vettoriale

$$u \in \ker(T) \Leftrightarrow T(u) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sum_{i=0}^{k-1} a_i(t)\, u^{(i)}(t) = 0$$

$\Leftrightarrow$ u soluz. dell'eq. omogenea.

1.3 Esibisco una base fatta di k elementi.

Fisso t_0, definisco $u_{(j)}(t)$ come la soluz. dell'eq. diff. t.c.

$$u^{(j-1)}(t_0)=1 \qquad u^{(i)}(t_0)=0 \ \forall i \neq j-1.$$

Dimostro che generano e sono lin. indipendenti.

Back to STRATEGIA

1) Trovare base dello sp. di soluzioni della omogenea.

2) Trovare soluz. particolare

3) Sommare e imporre condizioni iniziali.

$$\begin{cases} u''' - 4u'' + 4u' = e^{2t} \\ u(0) = 0 \\ u'(0) = 0 \\ u''(0) = 1 \end{cases}$$

1) Considero il pol. caratteristico

$p(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$ e trovo le radici

$p(x) = x \cdot (x^2 - 4x + 4)$

$= x \cdot (x-2)^2$ con molt. $= 2$.

RADICI: 0, 2

$\Rightarrow$ Base dello sp. delle soluzioni:

$e^{0t} = 1$, e^{2t}, $t \cdot e^{2t}$

$\Rightarrow$ Soluz. omogenea

$C_0 + C_1 \cdot e^{2t} + C_2 \cdot t \cdot e^{2t}$

2) Soluzione particolare

$$u''' - 4u'' + 4u' = e^{2t}$$

Provo a indovinare:

se ci fosse stato e^{3t}

avrei provato $\bar{u}(t) = c \cdot e^{3t}$

In questo caso però, se provo con e^{2t} ho

$$8 \cdot e^{2t} - 16\, e^{2t} + 8\, e^{2t} = 0 .$$

Stessa cosa se provo $\bar{u}(t) = c \cdot t \cdot e^{2t}$.

Provo quindi $\bar{u} = t^2 \cdot \alpha \cdot e^{2t}$

$$\bar{u}' = 2t\alpha\, e^{2t} + 2t^2 \alpha\, e^{2t} =$$

$$= \alpha e^{2t} (2t + 2t^2)$$

$$\bar{u}'' = 2\alpha e^{2t}(2t + 2t^2) + \alpha \cdot e^{2t} \cdot (4t + 2) =$$

$$= \alpha e^{2t}(4t^2 + 8t + 2)$$

$$\bar{u}''' = 2\alpha e^{2t}(4t^2 + 8t + 2) + \alpha e^{2t}(8t + 8) =$$

$$= \alpha e^{2t}(8t^2 + 24t + 12)$$

Impongo

$$\bar{u}''' - 4\bar{u}'' + 4\bar{u}' = e^{2t}$$

$$\alpha e^{2t}\left[(\cancel{8t^2} + \cancel{24t} + 12) - 4(\cancel{4t^2} + \cancel{8t} + 2) + 4(\cancel{2t} + \cancel{2t^2})\right] = e^{2t}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha \cdot e^{2t} \cdot 4 = e^{2t}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\alpha = \frac{1}{4}}$$

Sol. part. $\bar{u}(t) = \frac{1}{4} t^2 \cdot e^{2t}$

3) Impongo condizioni iniziali

Sol. generale sarà:

$$u(t) = c_0 + c_1 \cdot e^{2t} + c_2 \cdot t \cdot e^{2t} + \frac{1}{4} t^2 e^{2t}$$

$u(0) = 0 \rightsquigarrow c_0 = -c_1$

$u'(0) = 0 \rightsquigarrow 2c_1 + c_2 = 0 \to c_2 = -2c_1$

$u''(0) = 1 \rightsquigarrow$ CONTI ...

$$4c_1 + 2c_2 + 2c_2 + \frac{1}{2} = 1$$

$$4c_1 + 4c_2 = \frac{1}{2}$$

$$-4c_1 = \frac{1}{2} \qquad c_1 = -\frac{1}{8}$$

$c_2 = \frac{1}{4}$

$c_0 = \frac{1}{8}$

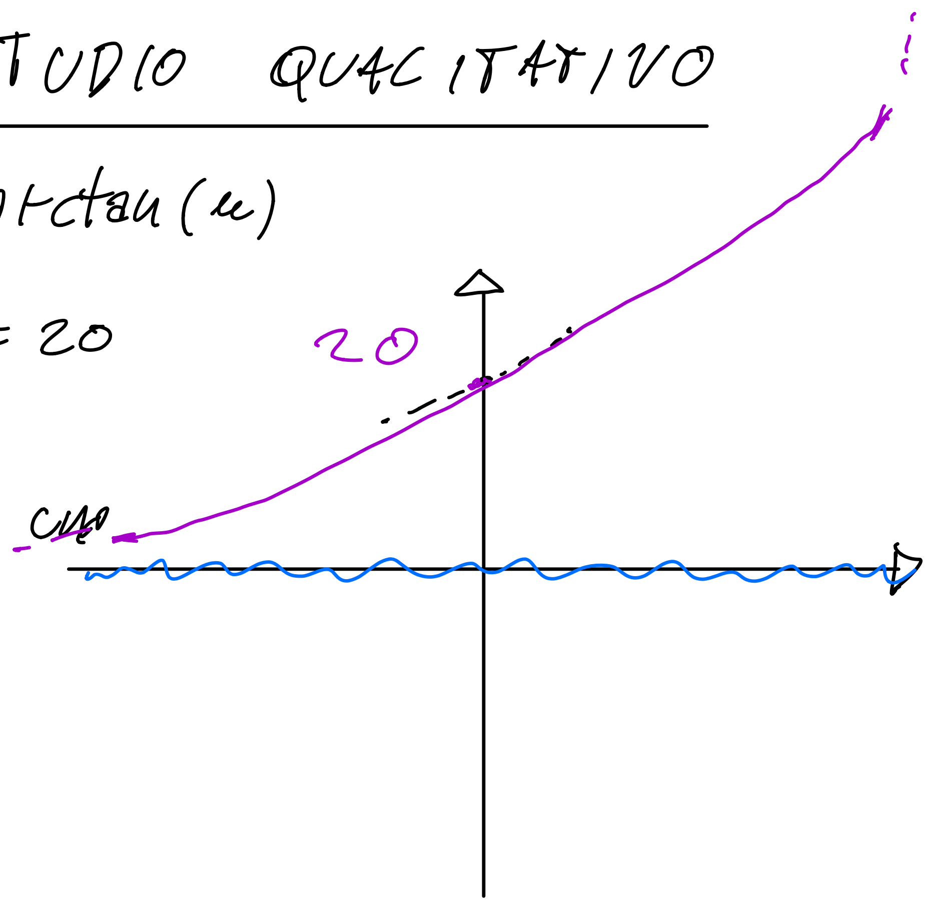
SOLUZIONE

$$u(t) = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} e^{2t} + \frac{1}{4} t e^{2t} + \frac{1}{4} t^2 e^{2t}.$$

STUDIO QUALITATIVO

$$\begin{cases} u' = \arctan(u) \\ u(0) = 20 \end{cases}$$

Disegnare una soluzione.



$\boxed{\text{FATTO 1}}$ $\arctan(u)$ è Lipschitz.

$\Rightarrow$ la soluzione è unica.

$\boxed{\text{FATTO 2}}$ (Teorema) $\arctan(u) \leq \frac{\pi}{2}$ sempre.

$\Rightarrow$ La soluzione esiste globalmente.

Teorema (ORDINE 1)
$$\begin{cases} u' = f(t,u) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$
con f che soddisfa ip. Teorema 2 + LIMITATA
$\Rightarrow$ LA soluzione esiste globalmente.

$\boxed{\text{Recall}}$ Una sol. $u(t)$ può avere 3 comp:

1) Esiste $\forall t \in \mathbb{R}$ (ESIST. GLOBALE)

2) $\exists\, t_1 > t_0$ t.c. $\lim_{t \to t_1^-} (u(t)) = \pm\infty$

3) $\exists\, t_1 > t_0$ t.c. t_1 non è nell'insieme di definizione di $u(t)$.

$\boxed{\text{FATTO 3}}$ $u(t) \equiv 0$ risolve

$$u' = \arctan(u).$$

$\Rightarrow$ (Fatto 3bis) Se $u(0) > 0$

$\Rightarrow u(t) > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Infatti se $\exists\, \bar{t} \in \mathbb{R}$ t.c. $u(\bar{t}) = 0$

$\Rightarrow$ Considero pbm di Cauchy

$$\begin{cases} v' = \arctan(v) \\ v(\bar{t}) = 0 \end{cases}$$

Questo ha sol. unica (Teorema 2) e per il fatto 3 $v \equiv 0$ è soluzione

Quindi se $u(\bar{t}) = 0$ avrei violazione di unicità. (Anche u risolve il "nuovo" pbm di Cauchy!)

$\boxed{\text{Fatto 4}}$ u crescente.

$$u' = \arctan \underbrace{u}_{>0} > 0 .$$

$\boxed{\text{Fatto 5}}$ u ammette limite per $t \to \pm\infty$.

(segue dal fatto che è monotona)

$$\lim_{t\to-\infty} u(t) = \ell \in [0, 20]$$

MA $\lim_{t\to-\infty} u'(t) = \lim_{t\to-\infty} \arctan(u(t)) =$

$= \arctan(\ell)$

$\Rightarrow u'(t)$ ha limite per $t\to-\infty$.

Teorema (dell'asintoto)

Se ho un pbm di Cauchy di ordine 1 in cui la soluz. esiste globalmente e t.c.

1) $\lim_{t\to-\infty \, (+\infty)} u(t) = \ell \in \mathbb{R}$

2) $\lim_{t\to-\infty} u'(t)$ esiste

$\Rightarrow \lim u'(t) = 0$.

$t \to -\infty$

$\Rightarrow$ Per teo. asintoto

$$\arctan \ell = 0 \quad \Rightarrow \ell = 0.$$

$$\Rightarrow \lim_{t \to -\infty} u(t) = 0.$$

Considero ora $\lim_{t \to +\infty} u(t) = L \in [20, +\infty]$

se $L \in \mathbb{R}$ $(\neq +\infty)$

$\Rightarrow$ con lo stesso conto

$$\lim_{t \to +\infty} u'(t) = \lim_{t \to +\infty} \arctan(u(t)) =$$

$$= \underset{\substack{\uparrow \\ \text{teo. asintoto}}}{\arctan(L) = 0}$$

MA $L \geq 20$, assurdo.

$$\Rightarrow \lim_{t \to +\infty} u(t) = +\infty.$$

$\boxed{\text{Fatto 6}}$ Regolarità

$$u' = \arctan u$$

è C^∞

$\Rightarrow u$ è C^∞, (Rigoroso: dim. per induzione che $u \in C^k \Rightarrow u \in C^{k+1}$

$\boxed{\text{Fatto 7}}$ u è convessa.

Verifico che $u'' > 0$.

$$u'' = (\arctan u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u' =$$

$$= \frac{\arctan u}{1+u^2} > 0 \; . \Rightarrow u \text{ convessa.}$$

$\boxed{\text{Fatto 8}}$ $\lim_{t\to+\infty} u'(t) = \frac{\pi}{2}$. Ipotizzo che per $t \to +\infty$ $u(t) \sim \frac{\pi}{2} t$.

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{u(t)}{\frac{\pi}{2} t} \underset{\text{Hôpital}}{=} \lim_{t\to+\infty} \frac{u'}{\frac{\pi}{2}} = 1 .$$

$\Rightarrow u \sim \frac{\pi}{2} t$ per $t \to +\infty$.

Esercizio 1) Come va $u \to -\infty$?

2) Se $u(0) < 0$ cosa succede?